isometriche, si ha:

$$(\partial/\partial t + \Delta_x)f^*(t,x,x') = \Sigma_p(\partial/\partial t + \overline{\Delta}_{\overline{y}})\overline{k}^*(t,\overline{y},s_p(x')) = 0;$$

infine risulta $\forall\ \phi \in C^\infty_*(M)$, per il teorema di Fubini:

$$\int_M f^*(t,x,x')\,\phi(x')\,dv_g(x') = \int_{\overline{M}} \overline{k}^*(t,\overline{y},y')(\phi\circ\pi)(y')\,dv_{\overline{g}}(y')$$

che tende a $(\phi\circ\pi)(\overline{y}) = \phi(x)$ per $t \longrightarrow 0^+$.

Per l'unicità del nucleo del calore si ha quindi:

$$f^*(t,x,x') = k^*(t,x,x').$$

Ma allora per $x' = x$ si ha, considerata la positività di $\overline{k}^*$:

$$\overline{k}^*(t,\overline{y},\overline{y}) \leq \Sigma_{y'\in\pi^{-1}(x)}\, \overline{k}^*(t,\overline{y},y') = k^*(t,x,x)$$

e quindi (cf. [2], p.100):

$$\sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\overline{\lambda}*_i t} = \int_{\overline{M}} \overline{k}^*(t,\overline{y},\overline{y})\,dv_{\overline{g}}(\overline{y}) = \int_M \Sigma_{\overline{y}\in\pi^{-1}(x)}\, \overline{k}^*(t,\overline{y},\overline{y})\,dv_g(x) \leq$$

$$\leq h\int_M k^*(t,x,x)\,dv_g(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\lambda_i^* t}\,.\ \_|$$

6.3. In base alle osservazioni del n. 4.3 possiamo concludere che *i risultati ottenuti, in particolare (6.1.2) e (6.2.1), valgono anche per rivestimenti riemanniani ramificati ad h fogli il cui insieme di ramificazione abbia capacità nulla* (si noti che in base all'osservazione al teorema (3.3.1) quest'ipotesi è meno restrittiva di quella usata in [19] di codimensione ≥ 2 per dimostrare (6.2.1)).

7. UN'APPLICAZIONE ALLE SUPERFICIE MINIMALI DI R^3.

7.1. Sia M una superficie in $\mathbf{R}^3$ ed indichiamone con A la II forma quadratica fondamentale e con k la curvatura gaussiana. Se K è un compatto in M, l'*indice* di K è il numero degli autovalori negativi relativi al problema di Dirichlet:

$$(7.1.1) \qquad (\Delta_M - |A|^2)f = \mu_i f \quad \text{su } K, \qquad f|_{\partial K} = 0,$$

cioè se $\Delta_M f = \lambda^D{}_i f$, $|A|^2 f = \beta^D{}_i f$, $f|_{\partial K} = 0$, è il numero degli autovalori $\lambda^D{}_i$ minori di $\beta^D{}_i$. Se $\{K_r\}_{r\in \mathbf{N}}$ è una successione di compatti che invade M, l'indice di M è per definizione il limite per $r \longrightarrow +\infty$ degli indici dei K_r:

$$(7.1.2) \qquad \text{ind } M = \lim_r \text{ind } K_r.$$

7.2. Restringendo le considerazioni alle superficie minimali, poiché non esistono superficie minimali compatte senza bordo in $\mathbf{R}^n$ (cf. [16], p. 101), prenderemo in esame superficie minimali non compatte, complete nella metrica indotta. Si ha allora (v. [16], p. 135):

(7.2.1) TEOREMA. *Se M è una superficie minimale completa in $\boldsymbol{R}^n$, la sua curvatura totale c, se non è infinita, è un multiplo intero di 2π (si noti che per M è $k<0$, cf. [16] p. 127):*

$$c = \int_M k \, ds = -2\pi q, \qquad q \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\};$$

in particolare risulta per $n=3$:

$$(7.2.2) \qquad c = -4\pi h, \qquad h \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}.$$

D'altra parte FISHER COLBRIE in [11] ha dimostrato che:

(7.2.3) TEOREMA. *Una superficie minimale completa M di $\boldsymbol{R}^3$ ha indice finito se e solo se ha curvatura totale finita.*

Ha quindi senso chiedersi come l'indice di M vari rispetto alla curvatura totale, in particolare rispetto all'intero h di (7.2.2). Si ha (cf. [19]):

(7.2.4) TEOREMA. *Per una superficie minimale completa M di $\boldsymbol{R}^3$ risulta:*

$$\text{ind } M \leq Ch$$

ove C è una costante che non dipende da M.

Dim. Sia h finito. Per un teorema di OSSERMAN (cf. [16] p. 153), M è conforme ad una superficie di Riemann compatta $\bar{M}$ privata di un numero finito di punti. L'applicazione di Gauss si estende ad un'applicazione conforme $G : \bar{M} \longrightarrow S^2$ olomorfa sicché $\bar{M}$ è un rivestimento ramificato ad h fogli di S^2 il cui insieme di ramificazione è costituito dai punti isolati in cui $k = 0$. Assumendo su $\bar{M}$ la metrica indottavi da (S^2, can) tramite G ed indicando con $\{\mu_i\}, \{\lambda_i\}$, $i \in \mathbf{N}^*$, gli autovalori di $\bar{M}$ ed S^2 rispettivamente, si ha per (6.2.1):

$$\sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\mu_i t} \le h \sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\lambda_i t} \qquad \forall\ t > 0.$$

Per una superficie minimale M è, per la formula di Gauss-Codazzi:

$$|A|^2 = -2k$$

quindi l'indice di un dominio compatto $K \subset M$, cioè il numero degli autovalori negativi dell'operatore

$$\Delta_M - |A|^2 = \Delta_M + 2k,$$

è lo stesso che l'indice del dominio corrispondente in $\bar{M}$ per l'operatore

$$\Delta_{\bar{M}} - 2$$

(in quanto $G^*(ds^2{}_{S^2}) = -k(ds^2{}_{\bar{M}})$ e $\Delta_M = -k\Delta_{\bar{M}}$) ed è pertanto il numero degli autovalori di $\bar{M}$ che sono < 2.

Per passaggio al limite su una successione di compatti invadente M, si ha che lo stesso accade per l'indice di M.

Pertanto $\forall\ t > 0$ si ha:

$$(\text{ind } M)\, e^{-2t} \le \sum_{\mu_i < 2} e^{-\mu_i t} \le \sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\mu_i t} \le h \sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\lambda_i t}$$

e cioè

$$\text{ind } M \le Ch$$

dove si è posto $C = \inf_{t>0} e^{2t} \sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\lambda_i t}$. $\lrcorner$

In [19] TYSK dà una stima esplicita di C: tenendo conto del fatto che l'i-mo autovalore distinto di S^2 vale $i(i+1)$ ed ha molteplicità $2i+1$ (cf. [4], p. 160-162), si trova $C = 7{,}68183\ldots$.